等質開凸錐の基本相対不変式の決定

中島 秀斗

Kyushu university
(JSPS Research Fellow)

2014 年 3 月 4 日
第 10 回数学総合若手研究集会

研究の背景

- 等質凸領域の研究
  調和解析、統計、etc...
- 等質凸領域に対応する代数構造 (Vinberg 1963)
  等質凸領域 $\Leftrightarrow$ クラン
  等質開凸錐 $\Leftrightarrow$ 単位元を持つクラン
- 基本相対不変式
  $\Omega \subset V$: 等質錐
  $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$: 基本相対不変式

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

- クランを考察する動機
  - 代数構造が見やすい (正規分解：行列を拡張した形),
  - 右乗法作用素の既約因子に基本相対不変式が全て現れる.

Outline

1. 諸定義
    - クラン・正規分解
    - 基本相対不変式
    - クランの自己共役表現
2. クランの帰納的構造
    - 右乗法作用素の計算
    - 指数行列 σ と ε-表現の定義
3. 主結果
    - 指数行列の決定
    - その応用

Outline

1. **諸定義**
   - **クラン・正規分解**
   - **基本相対不変式**
   - **クランの自己共役表現**
2. **クランの帰納的構造**
   - **右乗法作用素の計算**
   - **指数行列 σ と ε-表現の定義**
3. **主結果**
   - **指数行列の決定**
   - **その応用**

クラン

V: 有限次元実ベクトル空間
$\triangle$: V の双線型な積

Definition

次の 3 条件を満たすとき、$(V, \triangle)$ をクランという：

- $[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x}$ (<u>l</u>eft symmetric <u>a</u>lgebra),
- $\exists s \in V^*$ s.t. $s(x \triangle y)$ が内積を定める (<u>c</u>ompactness),
- L_x の固有値はすべて正 (<u>n</u>ormality).

※ 一般的に、クランは非可換・非結合的・単位元を持たない.

例. $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に積 $\triangle$ を次で定義すれば, クランになる.

$$x \triangle y := \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x}), \quad \underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ x_{r1} & \cdots & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

準備

V: 単位元 e_0 を持つクラン

- $c_1, \ldots, c_r$: 原始べき等元の直交系
- V の正規分解

$$V = \bigoplus_{1 \le j \le k \le r} V_{kj}, \quad (V_{kj}\colon c_1, \ldots, c_r \text{に関する固有空間})$$

- クランに対応する等質錐
  - $\mathfrak{h} := \{L_x;\ x \in V\}$ (split solvable Lie algebra),
  - $H := \exp \mathfrak{h} \quad$ (岩沢部分群)
  - $\Omega := H \cdot e_0$: 等質錐になる.
  - 特に $H \curvearrowright \Omega$: 単純推移的.
- H-相対不変関数 $f(x)$:

$$\exists \chi\colon H \to \mathbb{R}\colon 1 \text{ 次元表現 s.t. } f(hx) = \chi(h) f(x).$$

基本相対不変式

Theorem (Ishi–Nomura 2008)

ある H-相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ が存在して，任意の H-相対不変多項式 $p(x)$ は

$$p(x) = (\mathrm{const.})\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (x \in V,\ m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とかける．さらにクランの右乗法作用素を R_x とすると，

$$p(x) = \mathrm{Det}\, R_x \Rightarrow m_j \geq 1\ (j = 1, \ldots, r).$$

この $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を等質錐 Ω の**基本相対不変式**という．

双対クラン

Definition. V の双対クラン積 $\triangledown$ を以下で定義する：

$$\langle x \triangledown y \,|\, z \rangle = \langle y \,|\, x \vartriangle z \rangle \quad (x, y, z \in V).$$

双対クランに対応する等質錐は元のクランの等質錐の双対錐と一致する.

$$\begin{array}{rccc} \text{homogeneous cone} & \Omega & \longleftrightarrow & \Omega^* \\ & \updownarrow & \text{dual} & \updownarrow \\ \text{clan} & (V, \vartriangle) & \longleftrightarrow & (V, \triangledown) \end{array}$$

Prop. $\vartriangle$ と $\triangledown$ との関係式:

$$x \vartriangle y + x \triangledown y = y \vartriangle x + y \triangledown x.$$

例. $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$, 内積 $\langle x \,|\, y \rangle := \mathrm{tr}(xy)$.

$$x \triangledown y = {}^t(\underline{x})\, y + y\, \underline{x}$$

クランの表現

E: 実ユークリッド空間 with 内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$.

Definition

$\varphi\colon V \to \mathcal{L}(E)$ が**双対**クラン $(V, \triangledown)$ の自己共役**表現**であるとは,

- $\varphi(x)^* = \varphi(x)$ かつ $\varphi(e_0) = \mathrm{id}_E$,
- $\varphi(x \triangledown y) = \overline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x)$.

ただし $\underline{\varphi}(x)$ $(\overline{\varphi}(x))$ は $\varphi(x)$ の下三角 (上三角) 部分.

別の言い方をすると、φ は $(V, \triangledown)$ から $(\mathrm{Sym}(E), \triangledown)$ への準同型。

Outline

1. 諸定義
   - クラン・正規分解
   - 基本相対不変式
   - クランの自己共役表現
2. クランの帰納的構造
   - 右乗法作用素の計算
   - 指数行列 σ と ε-表現の定義
3. 主結果
   - 指数行列の決定
   - その応用

表現から定義されるクラン

Proposition

直和空間 $V_E := \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ に次の積 $\triangle$ を定義する:

$$v \triangle v' = (\lambda\lambda')u + (\lambda'\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\xi' + \underline{\varphi}(x)\xi') + (Q(\xi,\xi') + x \triangle x')$$
$$(v = \lambda u + \xi + x,\ v' = \lambda' u + \xi' + x')$$

$\Rightarrow$ $(V_E^0, \triangle)$ は単位元を持つクランになる.

ただし $Q\colon E \times E \to V$ は φ に付随する対称双線型形式:

$$\langle Q(\xi,\xi') \,|\, x \rangle = \langle \varphi(x)\xi \,|\, \xi' \rangle_E \quad (\xi, \xi' \in E,\ x \in V).$$

ここで $Q[\xi] := Q(\xi,\xi)$, $Q[E] := \{Q[\xi];\ \xi \in E\}$ とおく.

表現から定義されるクラン

Proposition

直和空間 $V_E := \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ に次の積 $\triangle$ を定義する:

$$v \triangle v' = (\lambda\lambda')u + (\lambda'\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\xi' + \underline{\varphi}(x)\xi') + (Q(\xi, \xi') + x \triangle x')$$
$$(v = \lambda u + \xi + x,\ v' = \lambda' u + \xi' + x')$$

$\Rightarrow$ $(V_E^0, \triangle)$ は単位元を持つクランになる.

ただし $Q\colon E \times E \to V$ は φ に付随する対称双線型形式:

$$\langle Q(\xi, \xi') \,|\, x \rangle = \langle \varphi(x)\xi \,|\, \xi' \rangle_E \quad (\xi, \xi' \in E,\ x \in V).$$

ここで $Q[\xi] := Q(\xi, \xi)$, $Q[E] := \{Q[\xi];\ \xi \in E\}$ とおく.

右乗法作用素

R^0: V_E^0 の右乗法作用素

$$R^0_{\lambda u+\xi+x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi & \lambda \mathrm{id}_E & R^0_\xi \\ 0 & R^0_\xi & R_x \end{pmatrix} \quad (R \text{ は } V \text{ の右乗法作用素}).$$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}\, R^0_{\lambda u+\xi+x} = \lambda^{1+\dim E-\dim V}\, \mathrm{Det}\, R_{\lambda x-\frac{1}{2}Q[\xi]}.$$

Theorem

V_E^0 の基本相対不変式 $P_j(v)$ はある非負整数 $\alpha_j \geq 0$ を用いて

$$P_j(v) = \begin{cases} \lambda & (j=0), \\ \lambda^{-\alpha_j}\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}Q[\xi]) & (j=1,\dots,r) \end{cases}$$

とかける．ただし Δ_j はクラン V の基本相対不変式．

指数行列

H: Ω の岩沢部分群
$H \curvearrowright \Omega$: 単純推移的であることを用いて、$h \in H$ を次のように表す:

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rr} \end{pmatrix} \quad (h_{jj} > 0,\ h_{kj} \in V_{kj}).$$

Definition. f: H-相対不変関数 ($f(hx) = \chi(h)f(x)$)

$$\exists \tau_j \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \chi(h) = (h_{11})^{2\tau_1} \cdots (h_{rr})^{2\tau_r}$$

$\underline{\tau} := (\tau_1, \ldots, \tau_r)$: f の**指数** (multiplier).

指数行列

Definition

$\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jr})$: Δ_j の指数

$$\left(\Delta_j(he_0) = (h_{11})^{2\sigma_{j1}} \dots (h_{rr})^{2\sigma_{jr}}\right)$$

$$\sigma \text{が}\textbf{指数行列} \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \le j,k \le r}$$

Remark. (Ishi 2001)

- σ は (下) 三角行列,
- $\sigma_{jj} = 1$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \sigma_{r1} & \sigma_{r2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ε-表現

(φ, E): $(V, \triangledown)$ の表現
$\varepsilon = {}^t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r, \quad c_\varepsilon := \varepsilon_1 c_1 + \cdots + \varepsilon_r c_r.$

Definition

$$(\varphi, E) \text{ が } \varepsilon\text{-表現} \Leftrightarrow Q[E] = \overline{H \cdot c_\varepsilon}.$$

Remark. $\mathcal{O}_\varepsilon := H \cdot c_\varepsilon$ とおく．このとき

$$\overline{\Omega} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \mathcal{O}_\varepsilon \qquad \text{(Ishi 2000)}.$$

Proposition

(φ, E): 任意のクランの表現
$\exists 1\ \varepsilon = \varepsilon(\varphi) \in \{0,1\}^r$ s.t. φ は ε-表現.

ε-表現

$\varepsilon(\varphi)$ の構成法

$d_{kj} := \dim V_{kj}$ とおく.

$$l^{(1)} := {}^t(\dim E_1, \ldots, \dim E_r) \qquad (E_j := \varphi(c_j)E),$$
$$l^{(k)} := \begin{cases} l^{(k-1)} - {}^t(0, \ldots, 0, d_{k,k-1}, \ldots, d_{r,k-1}) & (l^{(k-1)}_{k-1} > 0), \\ l^{(k-1)} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このとき $\varepsilon(\varphi) = {}^t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ を次で定義する:

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & (\text{if } l^{(k)}_k > 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

つまり、ε は $\dim E_j$, $\dim V_{kj}$ によって完全に決まる.

Outline

主結果

Theorem

$$\left\{\begin{array}{ccl} V & : & \text{階数 } r \text{ のクラン} \\ (\varphi, E) & : & \varepsilon\text{-表現} \end{array}\right. \longrightarrow (V_E^0, \triangle)\text{: 階数 } r+1 \text{ のクラン}$$

$P_j(v)$: V_E^0 の基本相対不変式 $(j = 0, 1, \ldots, r)$.

$$P_j(\lambda u + \xi + x) = \lambda^{-\alpha_j} \Delta_j(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q[\xi]) \quad (j = 1, \ldots, r).$$

このとき非負整数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は指数行列 σ を用いて

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ 1 - \varepsilon_r \end{pmatrix}$$

のように表される.

指数行列 (2)

今の定理を V_E^0 の指数行列 σ^0 を用いて書き直すと、

$$\boldsymbol{\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma\varepsilon & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & I_r \end{pmatrix}.}$$

指数行列 (2)

- $V^{[k]}$ を V の右下の部分、$E^{[k]}$ はその横の部分とする.
- $$\begin{cases} E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}, \\ V^{[k]} := \bigoplus_{k<l\le k\le r} V_{ml}. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} & & {}^{t}E^{[k]} \\ \hline & E^{[k]} & V^{[k]} \end{array}\right)$$
- このとき $V^{[k]}$ は V の部分クランになる.
- さらに $(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$ は $(V^{[k]}, \triangledown)$ の表現：

$$\mathcal{R}^{[k]}(x)\xi := \xi \triangledown x \quad (x \in V^{[k]},\ \xi \in E^{[k]}).$$

指数行列 (2)

表現 $(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$ を $\varepsilon^{[k]}$-表現とし, さらに

$$\mathcal{E}_k := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{[k]} & I_{r-k} \end{pmatrix}$$

とおく.

Theorem

$$\sigma_V = \mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1.$$

$\varepsilon^{[k]}$ は $\dim V_{kj}$ によって完全に決まる.
つまり、σ も $\dim V_{kj}$ によって完全に決まる.

応用

Theorem

$D_j(x)$： Vinberg 多項式 (x の成分から帰納的に構成できる)

$$\Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i<j} D_i(x)^{\tau_{ji}}} \quad (j = 2, \ldots, r).$$

ただし

$$\tau_{ji} = -\sigma_{ji} + \sigma_{j,i+1} + \cdots + \sigma_{jj} \geq 0.$$

将来の展望

- V_E^0 の双対クランに関しても同様の議論をする：
  $(V_E^0, \triangledown)$ の基本相対不変式を $(V, \triangledown)$ のものを用いて表現する.
- 指数行列の他分野 (調和解析, 統計, etc...) への応用を試みる.
- (複素) 等質凸領域への拡張を試みる.

ご清聴ありがとうございました.